ORDINIRANO I EGZAKTNO VRIJEME U JEDNOSTAVNIM KAMATNOM RAČUNU

Bumba, Mihael

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Polytehnic in Pozega / Veleučilište u Požegi**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:112:466354

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-26**

Repository / Repozitorij:

Repository of Polytechnic in Pozega - Polytechnic in Pozega Graduate Thesis Repository

VELEUČILIŠTE U POŽEGI

MIHAEL BUMBA MBS: 6876

ORDINIRANO I EGZAKTNO VRIJEME U JEDNOSTAVNOM KAMATNOM RAČUNU

ZAVRŠNI RAD

Požega, 2020. godine.

VELEUČILIŠTE U POŽEGI

DRUŠTVENI ODJEL

PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ TRGOVINA

ORDINIRANO I EGZAKTNO VRIJEME U JEDNOSTAVNOM KAMATNOM RAČUNU

ZAVRŠNI RAD

IZ KOLEGIJA GOSPODARSKA MATEMATIKA 2

MENTOR: Bojan Radišić

mag.educ.math.et inf. v. pred.

STUDENT: Mihael Bumba

Matični broj studenta: 6876

Požega, 2020. godine

SAŽETAK

Neizostavni dio današnjeg svjetskog ekonomskog sustava su kamate na kredite. Kredit kao početni kapital u osamostaljivanju i izgrađivanju budućnosti većine mladih ljudi koji nakon završetka fakulteta kreću na burzu rada ima i svoje mane. Posuđivanje određenog iznosa novca od strane banaka katkad rezultira u nešto što nismo mogli predvidjeti kada smo tražili kredit. Svaki kredit za svoju naknadu traži kamate na iznos koji je posuđen. Kamate se mogu obračunavati na početku ili na kraju razdoblja, to jest postoji dekurzivni obračun kamate i anticipativni obračun kamata. Vrijeme trajanja ukamaćivanja može biti ordinarno ili egzaktno. Ordinirano i egzaktno vrijeme, te ordinirana i egzaktna kamata se može računati sa četiri različite metode: francuska metoda, engleska metoda, njemačka metoda i računanje koristeći aproksimativno vrijeme.

KLJUČNE RIJEČI: jednostavni kamatni račun, dekurzivni obračun kamate, anticipativni obračun kamate, ordinirano vrijeme, egzaktno vrijeme

ABSTRACT

Inevitable part of the world economy are interest rates. Loan as a seed capital for many young people coming fresh out of college who are trying to build their own companies does have its flaws. Taking a loan from a bank can be proven to be high or low risk investment. Every loan asks for interest rate depending on annual percentage rate. Interest rate can be calculated at the beginning or at the end of a period, so we have decursive interest rate and anticipative interest rate. Time period of interest rate can be ordinary and exact. Ordinary and exact time, ordinary and exact interest rate can be calculated using four different methods: French method, English method, Germain method and method using approximate time.

KEY WORDS: simple interest rate, decursive interest rate, anticipative interest rate, ordinary time, exact time

SADRŽAJ

1. UVOD

Ekonomija kao pokretač svih država svijeta te način na kako među sobom posluju poslovni subjekti je najdinamičnija kada je velik udio novca u opticaju. Kako bi određena država napredovala, ona mora proizvoditi te prodavati svoje proizvode u druge države, to jest drugim gospodarstvima. Zarađujući velik novac na račun svog proizvoda i dobre prodaje ne mora nužno značiti rast određenog gospodarstva. Gospodarstvo koje zarađuje bi istovremeno trebalo trošiti kako bi novac bio u opticaju svim granama gospodarstva te tako pospješio rast cjelokupne države.

Nemajući dovoljno novca u opticaju, poslovni subjekti se okreću bankama kao izvoru novih novčanih sredstava. Banke koje su voljne posuditi novac poduzećima za uzvrat traže naknadu na posuđen novac. Naknade koje banke uzimaju se još nazivaju kamate.

U ovom radu obraditi ćemo što je to jednostavni kamatni račun, koji su dijelovi kamatnog računa, kako banke dobivaju veću korist dajući dekurzivni ili anticipativni obračun kredita te kako se računa ordinarno, odnosno egzaktno vrijeme u jednostavnom kamatnom računu.

Literatura korištena u svrhu izrade ovog rada je iz primarnih i sekundarnih izvora, udžbenika za matematiku te izvora sa interneta.

2. ARITMETIČKI NIZ

2.1 Jednostavni obračun kamata i aritmetički niz

Aritmetički niz (aritmetička progresija) je niz članova (najčešće brojeva) a_1, a_2, a_3 … a_{n-1}, a_n svrstanih tako da je razlika (diferencija) između svakog člana i njenog prethodnoga stalna. Npr 1, 3, 5, 7, … ili 9, 5, 1, -3 … . U prvom nizu diferencija je 2, a u drugome -4. Generalno, mogli bi računati aritmetički niz ovako:

$$(a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots)$$

Primjer 1.

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 24, \dots$$

U primjeru 1. možemo uočiti da je prvi član niza 1, a diferencija između članova 4. Iz toga slijedi:

$$(a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots)$$

$$(1, 1 + 4, 1 + 2 \cdot 4, 1 + 3 \cdot 4, \dots)$$

$$(1, 5, 9, \dots)$$

Možemo aritmetički niz napisati kao pravilo. Svaki (*n*-ti) član aritmetičkog niza može se izračunati iz poznatoga jednog člana (npr. prvog a_1) i diferencije:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Ako je d > 0, niz je uzlazan, a ako je d < 0, niz je silazan. [www.enciklopedija.hr].

Primjer 2.

Koristeći pravilo aritmetičkog niza, izračunaj 10. član aritmetičkog niza.

$$2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, \dots$$

Diferencija ovog niza je 6 između svakog broja. Prvi član (a) iznosi 2. Koristeći pravilo aritmetičkog niza, dolazimo do sljedećeg zaključka:

$$a_n = a + d(n - 1)$$

$$a_n = 2 + 6(n-1)$$

$$a_n = 2 + 6n - 6$$

$$a_n = 6n - 4$$

Dakle 10.član niza je:

$$a_{10} = 6 \cdot 10 - 4$$

$$a_{10} = 56$$

Da bi se zbrojio dani aritmetički niz:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots$$

koristi se sljedeća formula:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a + kd) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

Primjer 3.

Zbroji prvih 10. članova iz aritmetičkog niza:

$$(1, 7, 13, 20, 27, \dots)$$

Prvi član zadanog niza je 1. Diferencija između članova je 6. Trebamo zbrojiti 10 članova niza. Iz toga slijedi:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a + kd) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$\sum_{k=0}^{10-1}(1 + k \cdot 6) = \frac{10}{2}(2 \cdot 1 + (10-1) \cdot 6)$$

$$= 5(2 + 9 \cdot 6) = 5(58) = 290$$

2.2 Jednostavni obračun kamata u aritmetičkom nizu

Kod jednostavnog obračuna kamata, kamate se u svakom razdoblju računaju na početnu vrijednost glavnice.

U jednostavnom kamatnom računu upotrebljavaju se oznake za sljedeće veličine:

C_0= glavnica
p – dekurzivna kamatna stopa
n – broj razdoblja (godina)
C_n – konačna vrijednost glavnice
I – jednostavne kamate (dekurzivni obračun kamata)

Imamo razmjer za jednu $I : C_0 = p : 100$, iz kojeg slijedi $I = \frac{C_0 \cdot p}{100}$

Jednostavne kamate za *n* godina veće su *n* puta od kamata za jednu godinu, pa ukupne jednostavne kamate za *n* godina iznose:

$$I = \frac{C_0 \cdot p}{100} \tag{1}$$

Kako je obračun kamata godišnji, jednostavan i dekurzivan, konačna je vrijednost glavnice na kraju:

Prve godine:

$$C_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p}{100}$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Druge godine

$$C_2 = C_1 + \frac{C_0 \cdot p}{100}$$

$$C_2 = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \frac{C_0 \cdot p}{100}$$

$$C_2 = C_0\left(\frac{2p}{100}\right)$$

Itd., na kraju općenito *n*-te godine $C_n = C_0\,(1 + \frac{np}{100})$

Naznačene konačne vrijednosti glavnice na kraju svake godine čine zapravo ovaj aritmetički niz: $C_0\,, C_1\,, C_2, \dots, C_n$.

U tom nizu prvi član $a_1 = C_0$, razlika d = $\frac{C_0 \cdot p}{100}$, broj članova je n + 1, a potrebno je odrediti konačnu vrijednost glavnice na kraju *n*-te godine, tj. C_n, koja označava opći član a_{n+1}

$$C_n C_n = a_{n+1}$$

$$C_n = C_0 + (n + 1 - 1)\frac{C_0 \cdot p}{100}$$

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right) \qquad (2)$$

Primjer 4.

Izračunaj konačnu vrijednost na koju naraste glavnica od 2.500,00 kn, ako je oročena na 10 godina uz godišnju kamatnu stopu od 4%. Obračun kamata je jednostavan i dekurzivan.

Rješenje:

$C_0 = 2.5000{,}00$

n = 10

p = 4%

$C_{10} = 2.500{,}00(1 + \frac{10 \cdot 4}{100})$

$C_{10} = 3.500{,}00kn$

Pomoću iste formule možemo provjeriti da dobivamo aritmetički niz:

$$C_1 = 2.500{,}00\left(1 + \frac{1 \cdot 4}{100}\right) = 2.600{,}00kn$$

$$C_2 = 2.500{,}00\left(1 + \frac{2 \cdot 4}{100}\right) = 2.700{,}00kn$$

$$C_3 = 2.500,00\left(1 + \frac{3 \cdot 4}{100}\right) = 2.800,00kn$$

$$C_4 = 2.500,00\left(1 + \frac{4 \cdot 4}{100}\right) = 2.900,00kn$$

$$C_5 = 2.500,00\left(1 + \frac{5 \cdot 4}{100}\right) = 3.000,00kn$$

$$C_8 = 2.500,00\left(1 + \frac{8 \cdot 4}{100}\right) = 3.300,00kn$$

3. OSNOVNI POJMOVI KAMATNOG RAČUNA

3.1 Kamatni račun

Kamatni račun kao područje primijenjene matematike veže se uz proces ukamaćivanja, odnosno kapitalizacije, koji podrazumijeva posudbu novca ili nekog drugog dobra na određeno vrijeme uz odgovarajuću naknadu [Gruić et al., 2006.].

Pod osnovne elemente kamatnog računa ubrajamo:

- glavnicu[1] (iznos novca ili novčana vrijednost nekog drugog objekta ukamaćivanja. Razlikujemo početnu i konačnu vrijednost glavnice)
- vrijeme trajanja ukamaćivanja[2] (vremenski period za koji se izračunava kamata)
- kamatu[3] (novčana vrijednost na ime posudbe glavnice)

Kako bi se svi ovi elementi kamatnog računa mogli preciznije utvrđivati, potrebno je pobliže razjasniti jedan od gore navedenih elemenata, a to je vrijeme. Kao što bi mogli logički ustvrditi, vrijeme je jedna od bitnih sastavnica procesa ukamaćivanja koja utječe na konačni iznos naknade, to jest nije nam svejedno da li smo posudili određeni iznos novca na 5 mjeseci ili 5 godina.

Kamata se u praksi često iskazuje u obliku kamatne stope, te kamatna stopa uvijek vrijedi za određeno vremensko razdoblje. Pod dopunski element kamatnog računa možemo navesti vrijeme na koje se odnosi kamatna stopa što u matematičkom smislu znači da se izražavanje ukupnog vremena ukamaćivanja kao osnovnog elementa kamatnog računa mora uskladiti s ovim dopunskim elementom [Gruić et al. 2006.].

[1] engl. principal
[2] engl. time
[3] engl. interest

4. JEDNOSTAVNI KAMATNI RAČUN

Kamatni račun može biti jednostavan i složen. Kamate koje se izračunavaju za svako razdoblje kapitalizacije kroz vrijeme trajanja kapitalizacije od iste vrijednosti glavnice nazivaju se jednostavne kamate. Obračun jednostavnih kamata može biti dekurzivan ili anticipativan. Jednostavne kamate primjenjuju se obično kod kratkoročnih financijskih poslova, koje traju manje od godinu dana [Relić, 2002: 78].

Jednostavni kamatni račun se koristi u sljedećim financijskim poslovima:

1. **Vrijednosni papiri** su jednostrani pravni akt u obliku isprave ili elektroničkoga zapisa koji ovlašteniku daje pravo na ostvarenje nekoga imovinskoga prava, odnosno kojim se izdavatelj obvezuje ispuniti neku imovinskopravnu obvezu; ovlaštenikovo ostvarenje prava iz isprave uvjetovano je njezinim držanjem. Značajka mu je apstraktnost, pa ovlašteniku pripada pravo iz papira neovisno o temeljnom poslu koji može prethoditi njegovu izdavanju. Za pojedine vrijednosne papire zakon propisuje bitne sastojke (elemente), os. naznaku vrste vrijednosnoga papira, ime i sjedište, odnosno prebivalište izdavatelja, ime ovlaštenika ako vrijednosni papir nije na donositelja, sadržaj obveze, odnosno prava, mjesto i datum izdavanja, serijski broj vrijednosnoga papira koji se izdaje u seriji te izdavateljev potpis. Isprava koja zbog nedostatka bitnoga sastojka ne vrijedi kao vrijednosni papir može u pravnim odnosima biti pravno relevantan dokument, npr. kao dokazno sredstvo o postojanju nekoga pravnoga odnosa, tj. prava i obveze. Ovlaštenik prava iz vrijednosnoga papira može biti označen imenom ili klauzulama *po naredbi* ili *na donositelja,* kojima su ujedno određeni i načini prijenosa vrijednosnoga papira, odnosno prava koje je u njem inkorporirano: vrijednosni papir na donositelja prenosi se predajom, vrijednosni papir na ime prenosi se u pravilu ustupom (cesijom), a vrijednosni papir po naredbi indosamentom. Prema sadržanom (inkorporiranom) pravu, vrijednosni papiri dijele se na obveznopravne ili dužničke (npr. mjenica, ček, obveznica, kreditno pismo), stvarnopravne (npr. teretnica, založnica, skladišnica) i korporacijske (npr. dionice). Značajka je nekih vrijednosnih papira (dionica, obveznica, trezorskih zapisa i dr.) da se njima trguje na burzama i drugim uređenim javnim tržištima na kojima se organizirano povezuju ponuda i potražnja. *Amortizacija* vrijednosnih papira služi otklanjanju posljedica do kojih bi

mogao dovesti njihov gubitak, krađa ili uništenje, s obzirom na povezanost papira i inkorporiranoga prava. U suvremenom izdavanju i prometu vrijednosnih papira, os. dionica, znatan je udjel tzv. nematerijaliziranih vrijednosnih papira – elektron. zapisa u računalnom sustavu Središnje depozitarne agencije – kojima se izdavatelj obvezuje ovlašteniku (vlasniku) ispuniti obvezu sadržanu u takvu vrijednosnom papiru.

- **Mjenica** je vrijednosni papir po naredbi kojim njezin izdavatelj (trasant) izdaje bezuvjetni nalog drugoj osobi (trasatu) da korisniku isprave (reminentu) isplati određenu svotu novca, odnosno sam izdavatelj se obvezuje izvršiti isplatu
- **Založnica** je vrijednosni papir koji donositelju nosi stalne kamate. Najčešće ga izdaju hipotekarne banke, jer je vrijednost založnica pokrivena hipotekama što ih banka ima na odobrene zajmove
- **Obveznica** je isprava koja sadrži priznanje postojanja neke obveze a služi vjerovniku kao dokaz, da je dužnik obvezu preuzeo. Obveznice mogu izdavati države, velike bankovne, prometne ili industrijske tvrtke a svrha izdavanja je prikupljanje sredstava, najčešće u značajnim iznosima. Obveznice, za razliku od dionica, donose unaprijed utvrđenu kamatu.
- **Dionica** je vrijednosni papir koji izdaje d.d. koji glasi na dio temeljnog kapitala, a svom imatelju daje članstvo odnosno prava i obveze koje iz tog članstva proizlaze .
- **Zadužnice** su obveznice koje se izdaju od strane poduzeća, ili nekog drugog poslovnog subjekta
- **Renta** je dohodak koji u naravi ili novcu stječe određena osoba (rentijer), bez vlastitoga rada ili poduzetničkog djelovanja, na temelju ispunjenih uplata ili vlasništva nad nekretninama.

2. **Potrošački kredit** je ugovorni odnos između vjerovnika (trgovca robom ili pružatelja usluge) i dužnika (kupca robe ili korisnika usluge) kojim vjerovnik namjenski odobrava novčani iznos za kupnju određene vrste robe ili usluge. Dužnik se pritom obvezuje da će u određenom roku otplatiti ustupljeni novčani iznos, zajedno s kamatama, i to u jednakim mjesečnim obrocima – ratama. [Gruić et al. 2006.].

3. **Štedni ulozi po viđenju** – predstavljaju novčana sredstva koja komitenti banaka (u pravilu stanovništvo) drže na svojim računima kod banke te na njih primaju odgovarajuću kamatu, sukladno politici kamatnih stopa svoje banke

4.1 Dekurzivni obračun kamata

Jednostavne kamate *I* izračunavaju se po formuli:

$$I = C_0 \cdot n \cdot p \tag{3}$$

C_0 - početna glavnica

$$C_0 = \frac{I}{np}$$

n– vrijeme trajanja ukamaćivanja

$$n = \frac{I}{C_0 \cdot p}$$

p – kamatna stopa

$$p = \frac{I}{C_0 \cdot n}$$

Nakon što smo izračunali iznos kamata *I* po zadanoj formuli, konačna vrijednost glavnice C_n se dobiva dodavanjem kamata glavnici.

$$C_n = C_0 + I \tag{4}$$

Primjer 5.

Kredit od 2.000,00 kn odobren je na 6 mjeseci uz 6% kamata godišnje. Izračunajte kamatu i ukupni iznos vraćenog kredita.

Rješenje:

$C_0 = 2.000{,}00$
$p = 6\% = 0{,}06$
$n = 6/12$

Uvrstimo u formulu (3) i prema tome slijedi:

$$I = 2.000{,}00 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{6}{12}$$

$$I = 60{,}00kn$$

Kamata iznosi 60,00 kn.

$$C_n = C_0 + I$$

$$C_n = 2.000{,}00 + 60{,}00 = 2.060{,}00kn$$

Konačna vrijednost iznosi 2.060,00 kn.

Primjer 6.

Uz koju će godišnju kamatnu stopu glavnica od 1.000,00 kn donijeti ulagaču 50,00 kn kamate nakon 12 mjeseci?

Rješenje:

Prema formuli (3) slijedi da je kamata p;

$$p = \frac{I}{C_0 \cdot n}$$

$$p = \frac{50,00}{1.000,00 \cdot 12/12} = 0,05 = 5\%$$

Glavnica od 1.000,00 kn će donijeti ulagaču 50,00 kn nakon 12 mjeseci uz godišnju kamatnu stopu od 5%.

Primjer 7.

Koliko je vremena potrebno da bi novčani ulog od 3.000,00 kn narastao na 3.500,00 kn, ako se primjenjuje jednostavni kamatni račun uz 5% kamata godišnje?

Rješenje:

Prema formuli (3) i formuli (4) slijedi:

$$I = C_0 \cdot n \cdot p$$

$$C_n = C_0 + I$$

$$I = C_n - C_0$$

$$n = \frac{I}{C_0 \cdot p}$$

$$n = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot p}$$

$$n = \frac{3.500,00 - 3.000,00}{3.000,00 \cdot 0,05}$$

$$n = 0,33 \cdot 12 = 40\ mj.$$

Primjer 8.

Marko ima 6.000,00 kn duga koji dospijeva na naplatu u roku od 6 mjeseci. Po dospijeću duga naplaćene su kamate u iznosu od 250,00 kn. Kolika je vrijednost kamatne stope? Obračun kamata je godišnji, dekurzivan i jednostavan.

Rješenje:

$C_0 = 6.000{,}00\ kn$

$n = 6 = \frac{6}{12} = 0{,}5$

$I = 250{,}00\ kn$

$p = ?$

$Uvrstimo\ li\ u\ formulu\ (3), slijedi\ da\ je\ kamata\ p$:

$$p = \frac{I}{C_0 \cdot n}$$

$$p = \frac{250{,}00}{6.000{,}00 \cdot 0{,}5} = 0{,}083\% = 8{,}3\%$$

Vrijednost kamatne stope na Markov dug je 8,3%.

Primjeri 5, 6, 7 i 8 su primjeri dekurzivnog obračuna kamata. Dekurzivni obračun kamata polazi od pretpostavke da se kamata obračunava na kraju elementarnog razdoblja ukamaćivanja, a primjenjuje se na glavnicu s početkom elementarnog razdoblja ukamaćivanja.

4.2 Anticipativni obračun kamata

Anticipativni obračun kamata je obračun kamata na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja. Pri obračunu jednostavnih kamata u svakom razdoblju ukamaćivanja glavnica ostaje nepromijenjena tijekom vremena trajanja kapitalizacije (ona s kraja vremena trajanja kapitalizacije) [Relić, 2002: 108]

Kod anticipativnog obračuna, kamate se u postotku računaju od konačne vrijednosti. Posudimo li od banke 1.000,00 kn sa kamatnom stopom od 10%, banci ćemo vratiti 1.111,11 kn. Dok posudimo li od banke 1.000,00 kn sa kamatnom stopom od 10%, računajući po dekurzivnom kamatnom računu, banci vratit ćemo 1.100,00 kn.

Formula za izračunavanje anticipativnog obračuna kamata nastaje od dvije formule:

Konačna vrijednost, kamatna stope za vrijeme trajanja ukamaćivanja nam daje anticipativni obračun kamate:

$$I = C_n \cdot n \cdot p$$

Veza između početne C_0 i konačne vrijednosti C_n je jednaka kao u dekurzivnom obračunu kamata:

$$C_n = C_0 + I$$

Povezivanjem ovih dviju formula dolazimo do konačne formule za anticipativni obračun kamata:

$$C_n = \frac{C_0}{1 - pn} \tag{5}$$

Primjer 9.

Uz koju će se godišnju kamatnu stopu neko ulaganje povećati za 250% u vremenskom razdoblju od 25 godina? Kolika je vrijednost ukupnih kamata ostvarenih u tom razdoblju? Obračun kamata je anticipativan i jednostavan.

Rješenje:

$C_n = 350\% C_0 = 3{,}5 C_0$

$n = 25$

$p = ?$

Prema formuli (5) slijedi da je kamata p:

$$p = \frac{1}{n} - \frac{C_0}{C_n \cdot n}$$

$$p = \frac{1}{n} - \frac{C_0}{3{,}5C_0 \cdot n}$$

$$Pokratimo\ C_0\ iz\ brojnika\ i\ C_0\ iz\ nazivnika:$$

$$p = \frac{1}{25} - \frac{1}{3{,}5 \cdot 25}$$

$$p = 0{,}04 - 0{,}0114$$

$$p = 0{,}0286 \cdot 100 = 2{,}86$$

Primjer 10.

Kolika je konačna vrijednost glavnice od 750,00 kn na kraju 3. godine, na kraju 5. godine, na kraju 7.godine i na kraju 10.godine uz 8% kamata godišnje, ako je obračun kamata jednostavan te a) dekurzivni i b) anticipativni?

Rješenje:

a) dekurzivni obračun kamata

Uvrstimo u formulu (5), te slijedi:

$$C_n = 750{,}00(1 + 0{,}08 \cdot 3)$$

$$C_n = 930{,}00\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice na kraju 3. godine iznosit će 930,00 kn.

$$C_n = C_0(1 + np)$$

$$C_n = 750{,}00(1 + 0{,}08 \cdot 5)$$

$$C_n = 1.050{,}00\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice na kraju 5. godine iznosit će 1.050,00 kn.

$$C_n = C_0(1 + np)$$

$$C_n = 750{,}00(1 + 0{,}08 \cdot 7)$$

$$C_n = 1.170{,}00\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice na kraju 7. godine iznosit će 1.170,00 kn.

$$C_n = C_0(1 + np)$$

$$C_n = 750{,}00(1 + 0{,}08 \cdot 10)$$

$$C_n = 1.350{,}00\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice na kraju 10. godine iznosit će 1.350,00 kn.

b) anticipativni obračun kamata

$$C_n = \frac{C_0}{1 - np}$$

$$C_n = \frac{750{,}00}{1 - 0{,}08 \cdot 3}$$

$$C_n = 986{,}84\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice nakon 3. godine iznosit će 986,84 kn.

$$C_n = \frac{C_0}{1 - np}$$

$$C_n = \frac{750,00}{1 - 0,08 \cdot 5}$$

$$C_n = 1.250,00\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice nakon 5. godine iznosit će 1.250,00 kn.

$$C_n = \frac{C_0}{1 - np}$$

$$C_n = \frac{750,00}{1 - 0,08 \cdot 7}$$

$$C_n = 1.704,55\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice nakon 7. godine iznosit će 1.704,55 kn.

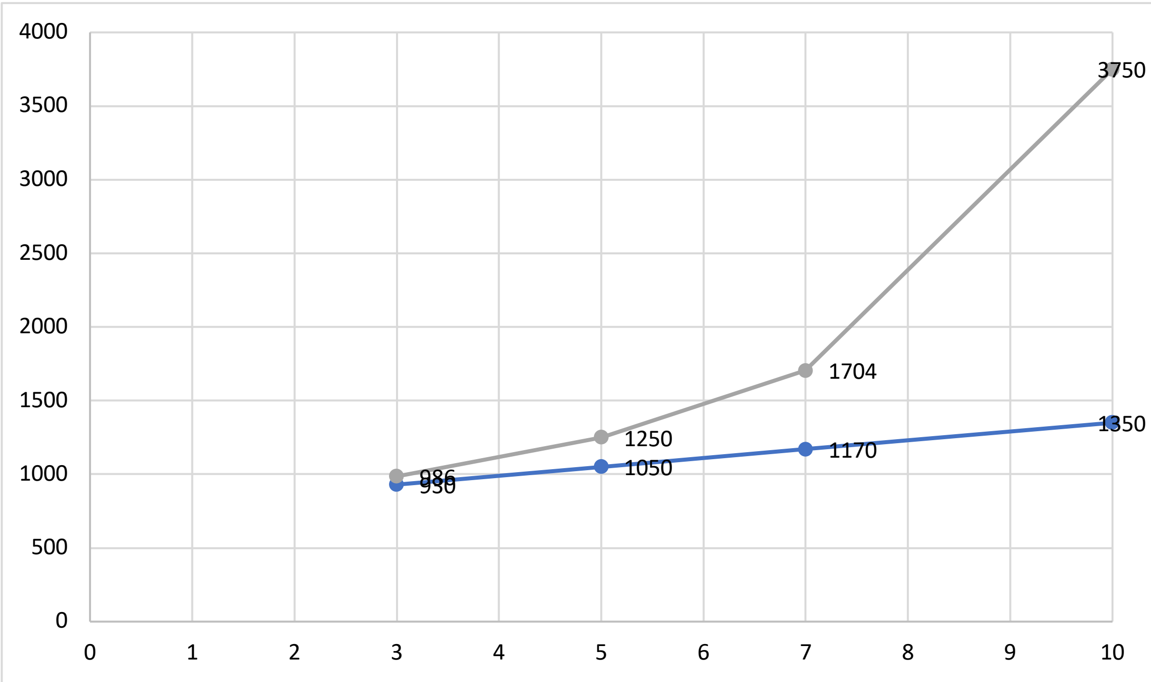
$$C_n = \frac{C_0}{1 - np}$$

$$C_n = \frac{750,00}{1 - 0,08 \cdot 10}$$

$$C_n = 3.750,00\ kn$$

Konačna vrijednost glavnice nakon 10. godine iznosit će 3.750,00 kn.

Graf 1.Grafički prikaz razlike anticipativnog i dekurzivnog obračuna kamata



Izvor: Izradio autor

Možemo zaključiti da jednostavni anticipativni kamatnjak generira više kamate od jednostavnog dekurzivnog kamatnjaka.

5. ORDINIRANO I EGZAKTNO VRIJEME

Pojmovi ordiniranog[4] i egzaktnog[5] vremena vezani su uz ukamaćivanje kod kojeg se vrijeme trajanja ukamaćivanja iskazuje u danima. Kod ordiniranog vremena, pretpostavlja se da svaki mjesec u godini ima točno 30 dana te, posljedično, da svaka godina ima 360 dana. Nasuprot tome, kod egzaktnog vremena računa se faktički broj dana između datuma na koji počinje ukamaćivanja i datuma na koji završava [Gruić, et al., 2006.].

Primjer 11.

Koristeći ordinirano i egzaktno vrijeme, izračunaj do kojeg datuma će se kredit isplaćivati ako je ugovoren na 120 dana počevši s 15. rujna?

Rješenje:

METODA	BROJ DANA U MJESECU					UKUPNO
	RUJAN	LISTOPAD	STUDENI	PROSINAC	SIJEČANJ	
EGZAKTNO	15	31	30	31	13	120
ORDINIRANO	15	30	30	30	15	120

U ordiniranom vremenu svaki mjesec ima 30 dana. Stoga pribrajamo 15 dana od mjeseca rujna, te dodajemo 30 dana mjeseca kolovoza, 30 dana mjeseca studenog, 30 dana mjeseca prosinca i 15 dana mjeseca siječnja. Kredit će se isplaćivati do 15. siječnja.
Koristeći egzaktno vrijeme, svaki mjesec će imati svoj stvaran broj dana. Rujan će imati 15 dana, kolovoz će imati 31 dan, studeni 30 i prosinac 31. Nakon što smo zbrojili sve dane iz prošlih mjeseci, ostaje nam 13 dana da dođemo do brojke od 120 dana. Dakle kredit će se isplaćivati do 13. siječnja.

[4] engl. ordinary time
[5] engl. exact time

Primjer 12.

Koristeći egzaktno vrijeme, izračunaj do kojeg datuma će se kredit isplaćivati ako je ugovoren na 60 dana počevši sa 10. veljače 2020. godine?

Rješenje:

U egzaktnom vremenu godina ima 365 dana, stoga svaki mjesec ima svoj realan broj dana. Pošto je prijestupna godina, veljača će imati 29 dana. Ožujak kao i svake godine ima 31 dan, što zajedno daje 50 dana. Nadodamo 10 dana u travnju i dobijemo odgovor da će se kredit isplaćivati do 10. travnja.

Kako postoji dva različita računanja dana u godinu, tako također postoje dvije različite kamate vezane za isto računanje. Ordinirana kamata[6] podrazumijeva da u godini imamo 360 dana dok egzaktna kamata[7] podrazumijeva da u godini imamo 365, odnosno 366 dana ukoliko je prijestupna godina.

Uz dva načina uvrštavanja vremena trajanja ukamaćivanja te dvije kategorije kamata, dolazimo do četiri različite kombinacije izračunavanja ukupnih kamata:

1) Egzaktno vrijeme uz ordiniranu kamatu: t = stvarni broj dana / 360
2) Egzaktno vrijeme uz egzaktnu kamatu: t = stvarni broj dana / 365 (366)
3) Ordinirano vrijeme uz ordinarnu kamatu: t = aproksimativni broj dana / 360
4) Ordinirano vrijeme uz egzaktnu kamatu: t = aproksimativni broj dana / 365 (366)

5.1 Francuska metoda

Prvi način koji objedinjuje egzaktno vrijeme uz ordinarnu kamatu se još naziva francuska metoda ili bankarsko pravilo[8]. U pravilu ju sve banke koriste u obračunu kamata. Najviše je zastupljena u Sjedinjenim Američkim Državama.

[6] engl. ordinary interest
[7] engl. exact interest
[8] engl. Bankers' Rule

Formula koja se koristi za francusku metodu:

$$t_f = \frac{egzaktan\ broj\ dana}{360} \tag{6}$$

5.2 Engleska metoda

U Hrvatskoj najučestalija metoda je engleska. Engleska metoda koristi egzaktno vrijeme uz egzaktnu kamatu što daje najtočnije i najrealnije dane na koje podižete kredit.

Formula koju engleska metoda koristi:

$$t_e = \frac{egzaktan\ broj\ dana}{365(366)} \tag{7}$$

5.3 Njemačka metoda

Njemačka metoda koristi ordinarno vrijeme uz ordinarnu kamatu te će izračun po njemačkoj metodu biti najniži između tri navedene metode.

Formula koju njemačka metoda koristi:

$$t_d = \frac{ordiniran\ broj\ dana}{360} \tag{8}$$

5.4 Aproksimativna metoda

Aproksimativna metoda koristi ordinirano vrijeme uz egzaktnu kamatu. Ova metoda se u pravilu nikada ne koristi. Formula za aproksimativnu metoda:

$$t_a = \frac{ordiniran\ broj\ dana}{365(366)} \tag{9}$$

Primjer 13.

Kredit od 20.000 kn odobren je na 6 mjeseci u pušten u tečaj 15.svibnja 2020. Godine uz 10% godišnjih kamata i dekurzivni obračun. Izračunaj kamatu na taj kredit primjenom:

a) Francuske metode

b) Engleske metode

c) Njemačke metode

d) Aproksimativna metoda

Rješenje:

$C_0 = 20.000{,}00\ kn$

$p = 10\% = 0{,}1$

$I = C_0 \cdot n \cdot p$

$I = 20.000{,}00 \cdot 0{,}1n$

$I = 2.000{,}00t$

Prema francuskoj metodi računanja, svaki mjesec će imati onoliko dana koliko to ima prema gregorijanskom kalendaru. Dakle ukoliko se ne radi o prijestupnoj godini, broj dana će iznositi 365, odnosno 366. Engleska metoda će također brojati dane prema gregorijanskom kalendaru dok će se njemačka metoda oslanjati na to da svaki mjesec ima 30 dana. U računanjima ne brojimo prvi dan odobrenja kredita, ali brojimo zadnji dan. Iz toga proizlazi sljedeće:

METODA	BROJ DANA U MJESECU							UKUPNO
	SVIBANJ	LIPANJ	SRPANJ	KOLOVOZ	RUJAN	LISTOPAD	STUDENI	
FRANCUSKA	16	30	31	31	30	31	15	184
ENGLESKA	16	30	31	31	30	31	15	184
NJEMAČKA	15	30	30	30	30	30	15	180
APROKSIM.	15	30	30	30	30	30	15	180

a) Francuska metoda

$$t_f = \frac{16+30+31+31+30+31+15}{360} = 0{,}511$$

$$I = 2.000{,}00 \cdot 0{,}511 = 1.022{,}00\ kn$$

b) Engleska metoda

$$t_e = \frac{16+30+31+31+30+31+15}{365} = 0{,}504$$

$$I = 2.000{,}00 \cdot 0{,}504 = 1.008{,}00\ kn$$

c) Njemačka metoda

$$t_d = \frac{6\ x\ 30}{360} = 0{,}5$$

$$I = 2.000{,}00 \cdot 0{,}5 = 1.000{,}00\ kn$$

d) Aproksimativna metoda

$$t_d = \frac{6\ x\ 30}{365} = 0{,}493$$

$$I = 2.000{,}00 \cdot 0{,}493 = 986{,}30\ kn$$

Iz primjera vidimo da je kamatni račun osjetljiv na izbor metode utvrđivanja vremena. IV- način uz njemačku metodu pokazuje najnižu ukupnu kamatu, dok francuska metoda pokazuje puno veću kamatu, čime objašnjava zašto je najomiljenija među bankarima.

Primjer 14.

Tvrtka “Okolo naokolo” podigla je kratkoročni zajam za obrtna sredstva u iznosu od 500.000,00 kn uz 5% godišnjih kamata za vrijeme od 1.1.2019. godine do 14.9.2019. godine. Obračunajte kamate:

a) Francuskom metodom

b) Engleskom metodom

c) Njemačkom metodom

Rješenje:

$C_0 = 500.000,00\ kn$

$p = 5\% = 0,05$

$I = C_0 \cdot n \cdot p$

$I = 500.000,00 \cdot 0,05t = 25.000,00t$

METODA	BROJ DANA U MJESECU									
	SIJ.	VELJ.	OŽUJ.	TRAV.	SVIB.	LIP.	SRPA.	KOLO.	RUJAN	ukupno
FRANCUSKA	30	28	31	30	31	30	31	31	14	256
ENGLESKA	30	28	31	30	31	30	31	31	14	256
NJEMAČKA	29	30	30	30	30	30	30	30	14	253

a) Francuska metoda

$$t_f = \frac{30+28+31+30+31+30+31+31+14}{360} = 0,711$$

$$I = 25.000,00 \cdot 0,711 = 17.777,78\ kn$$

b) Engleska metoda

$$t_e = \frac{30 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 14}{365} = 0,701$$

$$I = 25.000,00 \cdot 0,701 = 17.534,25\ kn$$

c) Njemačka metoda

$$t_d = \frac{29 + 7x30 + 14}{360} = 0,703$$

$$I = 25.000,00 \cdot 0,703 = 17.569,44\ kn$$

Primjer 15.

Glavonja na svom kunskom štednom računu u 2019. godini ima sljedeće podatke:

Datum	Isplata	Uplata	Stanje
15.3.2019.	-	7.000,00	7.000,00
4.4.2019.	3.000,00	-	4.000,00
30.5.2019.	4.000,00	-	0
8.9.2019.	-	2.000,00	2.000,00
15.12.2019.	-	3.000,00	5.000,00

Izračunajte ukupne kamate za 2019. godinu (na dan 31.12.2019.), ako banka u toj godini obračunava 2,7% jednostavnih kamata uz godišnji dekurzivni obračun. Koristite francusku, englesku i njemačku metodu izračunavanja vremena ukamaćivanja.

Rješenje:

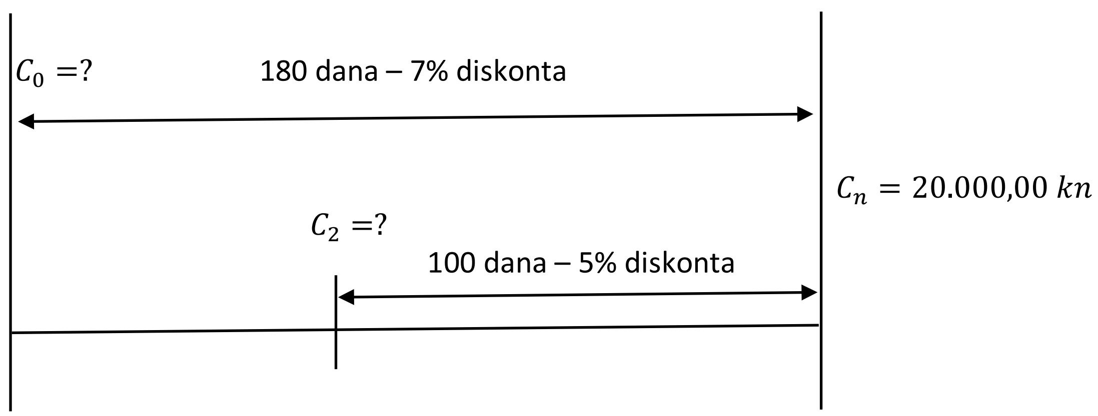
Datum	Transakcija(T)	Dani(n)	$t_{f=\frac{n}{360}}$	$t_e = \frac{n}{365}$	$t_{d=\frac{n}{360}}$	$I = T \cdot t \cdot p$ $p = 0,027$		
						t_f	t_e	t_d
15.3.2019.	7.000,00	291(284)	0,80833	0,79726	0,78889	152,77	150,68	149,10
4.4.2019.	-3.000,00	271(265)	0,75278	0,74246	0,73611	-60,98	-60,14	-59,62
30.5.2019.	-4.000,00	215(210)	0,59722	0,58904	0,58333	-64,50	-63,62	-63,00
8.9.2019.	2.000,00	114(111)	0,31667	0,31233	0,30833	17,10	16,87	16,65
15.12.2019.	3.000,00	16(14)	0,04444	0,04384	0,03889	3,6	3,55	3,15
UKUPNO						**52,99**	**47,34**	**46,28**

Uvrštavajući broj dana od danog datuma, pa do kraja godine, izračunali smo za koliko dana obračunavamo kamate.

Prema rezultatima možemo vidjeti da francuska metoda obračunava najveće kamate, te se zato koristi najviše u bankarskom sustavu jer banke imaju najveću korist koristeći francusku metodu. Engleska metoda pokazuje znatno manju kamatu nego francuska metoda, pa bi mogli reći da više naginje prema njemačkoj metodu nego francuskoj. Njemačka metoda očekivano obračunava najmanju kamatu jer se obračunava najmanjim brojem dana od sve tri metode.

Primjer 16.

Neka poslovna banka u posjedu je 180-dnevne diskontne zadužnice nominalne vrijednosti 20.000,00 kn te diskontirane uz 7%. Točno 100 dana prije dospijeća zadužnice ta je banka rediskontirala zadužnicu drugoj banci uz 5% diskonta. Koliko je banka – originalni vjerovnik dobila kod diskonta te kolika je ustvari njezina dobit od držanja zadužnice u svom portfelju?



$C_n = 20.000{,}00 kn$

$n_1 = 180\ dana = \frac{180}{360}$
$d_1 = 7\% = 0{,}07$

$n_2 = 100\ dana = \frac{100}{360}$
$d_2 = 5\% = 0{,}05$

$$C_0 = C_n(1 - d_1 n_1)$$

$$C_0 = 20.000{,}00 \cdot \left(1 - 0{,}07 \cdot \frac{180}{360}\right) = 19.300{,}00\ kn$$

$$C_1 = C_n(1 - d_2 n_2)$$

$$C_1 = 20.000{,}00 \cdot \left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{100}{360}\right) = 19.722{,}22\ kn$$

$$Dobit = C_1 - C_0 = 19.722{,}22 - 19.300{,}00 = 422{,}22\ kn$$

6. ZAKLJUČAK

Naknada za posuđeni novac je postojala još od doba Rimskog Carstva. Tijekom stoljeća vjerovalo se da su jedna od cijena, dok se u srednjem vijeku gledalo na kamate kao na nešto zlo i sramotno. Kako je svijet napredovao, tako su se nalazile nove teorije i novi načini kako zaraditi posuđujući novac. Najpoznatije kamatne stope u zadnjih 100 godina su realne i monetarne kamatne stope. Realna kamatna stopa je određena kroz potražnju i ponudu realne štednje, dok monetarnu određuje potražnja i ponuda novca, odnosno dionica.

Kroz rad možemo vidjeti kako različiti načini ukamaćivanja daju različite konačne vrijednosti. Francusku metodu obračunavanja kamata u pravilu sve banke koriste. Najviše se koriste jer banke dobiju najviše kamata koristeći francusku metodu. Možemo vidjeti da razlika između ostalih metoda obračunavanja kamata je možda mala ako uzimate kredit jedanput, ali ako učestalo uzimate kredit, taj iznos je poprilično velik. Uzmete li u obzir koliko ostalih korisnika banke uzima kredit, banke poprilično puno zarađuju na kamatama koristeći francusku metodu.

Koliko su nam krediti neophodni govore nam osobna iskustva mladih ljudi koji su željni ostvarivanja osobnih ciljeva, educiranja na visokim učilištima, no za ostvarenje svega toga potreban im je kapital. Kada bih sustav kreditiranja funkcionirao na način da zaštiti mladog visokoobrazovanog građanina, te mu pomogao u osamostaljenju nakon završetka obrazovanja, mladi ljudi bi lakše i uspješnije ostvarivali svoje ciljeve.

LITERATURA

Knjige:

1. Relić B.; (2002) Gospodarska matematika, drugo izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Zagreb, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika
2. Gruić B. et al. (2006) Matematika za ekonomiste i managere, Zagreb, Mate : Zagrebačka škola ekonomije i managementa
3. B. Kovačić, B. Radišić, Gospodarska matematika, ŠK, Zagreb, 2011.
4. A.C. Chiang: Osnovne metode matematičke ekonomije, MATE, Zagreb, 1996.;
5. Barnett R. A., Ziegler M. R. i Byleen K. E. (2006) *Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti.* 8. izdanje. Zagreb: Mate: Zagrebačka škola ekonomije i managementa
6. Šego, B. (2008) *Financijska matematika*. Zagreb: Zgombić i partneri.

Internet izvor:

1. www.enciklopedija.hr

2. www.wikipedia.hr

3. Matematičko-fizički list, LXVII 3 (2016. – 2017.) 163 Zeljka Zrno, Marijana Ćutuk

4. https://www.mathsisfun.com/algebra/sequences-sums-arithmetic.html (16.9.2020.)

5. Kovačić, B., Radišić, B. (2011). Usporedba kvantitativnih efekata osnovnih kamatnih računa. Osječki matematički list, 11(1), 45-55. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/74946 (14.9.2020.)

IZJAVA O AUTORSTVU RADA

Ja, Mihael Bumba, pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor završnog rada pod naslovom ORDINIRANO I EGZAKTNO VRIJEME U JEDNOSTAVNOM KAMATNOM RAČUNU, te da u navedenom radu nisu na nedozvoljen način korišteni dijelovi tuđih radova.

U Požegi, 22. rujna 2020.

Ime i prezime studenta

Mihael Bumba